ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

(i) Το 0 είναι το μοναδικό ουδέτερο της πρόσθεσης

[Απ. Πράγματι αν $\exists 0' \in \mathbb{R}$ ώστε $a+0'=0'+a=a$ (*) $\forall a \in \mathbb{R}$,

τότε $0' \overset{(R3)}{=} 0+0' \overset{(*)}{=} 0$]

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$ το αντίθετο του a ως προς την πρόσθεση (που το (R4) λέει ότι $\exists$) είναι μοναδικό.

Απ: Έστω β, γ δύο αντίθετες του a ως προς την πρόσθεση, τότε

$a+\beta=\beta+a=0$ (1)

$a+\gamma=\gamma+a=0$ (2).

τότε $\beta \overset{(R3)}{=} \beta+0 \overset{(2)}{=} \beta+(a+\gamma) \overset{(R1)}{=} (\beta+a)+\gamma \overset{(1)}{=} 0+\gamma \overset{(R3)}{=} \gamma$

Συμβολισμός: Το γεγονός της μοναδικότητας μας επιτρέπει να συμβολίζουμε το μοναδικό αντίθετο του a ως προς την πρόσθεση με $-a$.
Έτσι $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists$ μοναδικό $-a \in \mathbb{R}$

(iii) Το 1 είναι το μοναδικό ουδέτερο του πολ/μου

[Απ. Πράγματι αν $1' \in \mathbb{R}$ ώστε $a \cdot 1' = 1' \cdot a = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$ (**),

τότε $1' \overset{(R7)}{=} 1 \cdot 1' \overset{(**)}{=} 1$]

(iv) Για δεδομένο $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ το συμμετρικό του α ως προς τον πολλ/σμο [που το (R8) λέει ότι $\exists$] είναι μοναδικό.

[Απ: Έστω β, γ συμμετρικά του α ως προς τον πολλ/μο,

τότε $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1$ (3)

$\alpha \cdot \gamma = \gamma \cdot \alpha = 1$ (4),

τότε $\beta \overset{(R7)}{=} \beta \cdot 1 \overset{(4)}{=} \beta \cdot (\alpha\gamma) \overset{(R5)}{=} (\beta\alpha)\gamma \overset{(3)}{=} 1 \cdot \gamma \overset{(R7)}{=} \gamma$

Σημείωση: Το γεγονός της μοναδικότητας μας επιτρέπει για $\alpha \neq 0$ να συμβολίσουμε το μοναδικό συμμετρικό του α ως προς τον πολλ/μο με α^{-1} (ή με $\frac{1}{\alpha}$) κ' καλείται αντίστροφο του α.

Έστω $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$ $\exists$ μοναδικό $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$, ώστε $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$

(v) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $-(-\alpha) = \alpha$

[Απ Εφόσον $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$, ο α είναι ο μοναδικός αντίθετος του $-\alpha$]

(vi) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$ $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$

(vii) Ιδιότητα της διαγραφής στην πρόσθεση

Αν $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, τότε $\beta = \gamma$

Απόδειξη:

$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$

$\Rightarrow (-\alpha) + (\alpha + \beta) = (-\alpha) + (\alpha + \gamma)$

$\underset{(R1)}{\Rightarrow} ((-\alpha) + \alpha) + \beta = ((-\alpha) + \alpha) + \gamma$

$\underset{(R4;)}{\Rightarrow} 0 + \beta = 0 + \gamma$

$\Rightarrow \boxed{\beta = \gamma}$

(viii) Ιδιότητα της διαγραφής στο πολ/μο του α.

Αν $\alpha\beta=\alpha\gamma$ κ' $\alpha\neq 0$, τότε $\beta=\gamma$

$\alpha\beta=\alpha\gamma \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha\beta)=\alpha^{-1}(\alpha\gamma)$

$\underset{(R5)}{\Rightarrow} (\alpha^{-1}\alpha)\beta=(\alpha^{-1}\alpha)\gamma$

$\underset{(R8)}{\Rightarrow} 1\beta=1\gamma$

$\underset{(R7)}{\Rightarrow} \beta=\gamma$.

(ix) Απορροφητική ιδιότητα του 0 στον πολ/μο

$\forall \alpha\in\mathbb{R}\quad \alpha\cdot 0=0$.

Απόδειξη:

$$\alpha\cdot 0+\alpha\cdot 0 \underset{(R9)}{=} \alpha(0+0) \underset{(R3)}{=} \alpha\cdot 0 \underset{(R3)}{=} \alpha\cdot 0+0$$

Άρα από την ιδιότητα (viii) προκύπτει $\alpha\cdot 0=0$.

(x) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\alpha(-\beta)=-(\alpha\beta)$

Ομοίως $(-\alpha)\beta=-(\alpha\beta)$

Απόδειξη:

$$\alpha(-\beta)+\alpha\beta \underset{(R3)}{=} \alpha((-\beta)+\beta) \underset{(R4)}{=} \alpha\cdot 0 \underset{(ix)}{=} 0.$$

Άρα ο αντίθετος του $\alpha\beta$ είναι ο $\alpha(-\beta)$, άρα $-(\alpha\beta)=\alpha(-\beta)$

(xi) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$

Απόδειξη: $(-\alpha)(-\beta)+(-\alpha)\beta \underset{(R9)}{=} (-\alpha)((-\beta)+\beta) \underset{(R4)}{=} (-\alpha)\cdot 0 \underset{(ix)}{=} 0$

Άρα, $(-\alpha)(-\beta)=-((-\alpha)\beta)=-(-\alpha\beta)=\alpha\beta$

(xii) Αν $xy=0$, τότε $x=0$ ή $y=0$

Απόδειξη:

Έστω ότι $xy=0$

Αν $x\neq 0$, τότε $\exists\, x^{-1}$, ώστε $x^{-1}x=1$

$x\cdot y=0 \Rightarrow x^{-1}(xy)=0$

$\overset{(R5)}{\Rightarrow} (x^{-1}x)y=0$

$\overset{(R8)}{\Rightarrow} 1\cdot y=0 \overset{(R7)}{\Rightarrow} y=0$

(xiii) Αν $x>0$ κ' $y>0$, τότε $x+y>0$

Απόδειξη: $x>0 \overset{(R12)}{\Rightarrow} x+y>0+y$

$\Rightarrow x+y>y$

κ' εφόσον $y>0$ από το (R11) προκύπτει $x+y>0$

(xiv) Αν $x>0$ κ' $y>0$, τότε $xy>0$

Απόδειξη: Αφού $y>0$ κ' εφόσον $x>0$ από το (R13) προκύπτει $xy>x\cdot 0$

$\Rightarrow xy>0$

(xv) (α) Αν $x>0$, τότε $-x<0$

(β) Αν $x<0$, τότε $-x>0$

(α) $x>0 \Rightarrow x+(-x)>0+(-x)$

$\Rightarrow 0>-x$, δηλαδή $-x<0$

(β) Ομοίως.

(xvi) $\forall a\in\mathbb{R}$ με $a\neq 0$ ισχύει $a\cdot a>0$

Απόδειξη: Εφόσον $a\neq 0$ από το (R10) $\exists$ δύο περιπτώσεις $a>0$ ή $a<0$

Αν $a>0$ από (xiv) προκύπτει $a\cdot a>0$.

Αν $\alpha<0$, τότε $-\alpha>0$ (λόγω της ...;)

Άρα $(-\alpha)(-\alpha)>0$, όμως $(-\alpha)(-\alpha)=\alpha\alpha$.

Άρα $\alpha\alpha>0$.

(χνέε) $1>0$.

__Απόδειξη:__ Επειδή $1\neq 0$ προκύπτει $1\cdot 1>0$, άρα $1>0$.

(πρόταση) α) Αν $x>0$, τότε $x^{-1}>0$

β) Αν $x<0$, τότε $x^{-1}<0$

__Απόδειξη:__ α) Επειδή από το (Ρ10) ισχύει ακριβώς μία από τις $x^{-1}>0$, $x^{-1}=0$, $x^{-1}<0$

για να $x^{-1}>0$ αρκεί να αποκλείσουμε τις δύο τελευταίες

Αν $x^{-1}=0$, τότε $x^{-1}x=0\cdot x \Rightarrow 1=0$, άτοπο.

Αν $x^{-1}<0$, τότε επειδή $x>0$ προκύπτει $xx^{-1}<x\cdot 0 \Rightarrow 1<0$, άτοπο.

Άρα $x^{-1}>0$

β) Έστω $x<0$

Από το αξίωμα (Ρ10) ισχύει ακριβώς μία από τις $x^{-1}>0$, $x^{-1}=0$, $x^{-1}<0$

Άρα για να $x^{-1}<0$ αρκεί να αποκλείσουμε τις δύο πρώτες

Αν $x^{-1}=0$, τότε $xx^{-1}=0\cdot x^{-1} \Rightarrow 1=0$, άτοπο.

Αν $x^{-1}>0$, τότε επειδή $x<0$ θα προκύψει $x^{-1}x<x^{-1}\cdot 0 \Rightarrow 1<0$, άτοπο.

Άρα $x^{-1}<0$

__Ορισμός:__ Για $x\in\mathbb{R}$ η απόλυτη τιμή του x ορίζεται ως εξής:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

__Συμβολισμός:__ $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}, x>0\}$

$\mathbb{R}^-=\{x\in\mathbb{R}, x<0\}$

Οι πράξεις αφαίρεση κ' διαίρεση ορίζονται ως εξής:

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ $\quad -: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \beta\neq 0$ $\quad \frac{\alpha}{\beta}=\alpha\beta^{-1}$ $\quad \mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\})\to\mathbb{R}$

Πρόταση: Κάθε μη κενό κ' φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum

Απόδειξη: α' απόδειξη: Έχουμε δείξει γενικά (σε οποιοδήποτε μερικά διατεταγμένο χώρο $(X,\leq)$) την εξής ισοδυναμία (ΑΣΚ)

(i) Κάθε μη κενό κ' αφ. υποσύνολο του X έχει supremum

(ii) Κάθε μη κενό κ' κφ υποσύνολο του X έχει infimum

Επειδή το $\mathbb{R}$ από το αξίωμα πληρότητας ($\mathbb{R}$14) ικανοποιεί το (i) θα ικανοποιεί κ' το (ii)

β' απόδειξη: (Άμεση)

Έστω A μη κενό κ' κφ υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έστω α ένα κφ του A, αντίστοιχα θέτουμε $B=\{-x,\ x\in A\}$

Για $x\in A$ έχουμε $\alpha\leq x$, άρα $-x\leq-\alpha$

έτσι το σύνολο B (που είναι μη κενό, διότι το A είναι μη κενό) είναι αφ.

Από το αξίωμα της πληρότητας το B έχει supremum. Θέτουμε $s=\sup B$.

Θα αποδείξουμε ότι $-s=\inf A$

(i) $-x\leq s \quad \forall x\in A$

Από εδώ προκύπτει ότι $-s\leq x \quad \forall x\in A$

Άρα το $-s$ είναι κφ του A.

(ii) Έστω s' ένα τυχαίο κφ του A (θέλω $s'\leq -s$)

τότε $-s\leq x \quad \forall x\in A \Rightarrow -x\leq -s' \quad \forall x\in A$

Άρα το $-s'$ είναι αφ του B. Επειδή $s=\sup B$ προκύπτει ότι $s\leq -s'$, άρα $s'\leq -s$

Από τα (i), (ii), έχουμε $-s=\inf A$